Méthodes numériques pour des problèmes elliptiques non linéaires apparaissant dans la théorie des tourbillons stationnaires d'un fluide idéal

E. Fernandez Cara

INRIA

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105 78150 Le Chesnay
France
Tél: 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 39

MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES NON LINÉAIRES APPARAISSANT DANS LA THÉORIE DES TOURBILLONS STATIONNAIRES D'UN FLUIDE IDÉAL

Enrique FERNANDEZ CARA

Octobre 1980

METHODES NUMERIQUES POUR DES PROBLEMES

ELLIPTIQUES NON LINEAIRES APPARAISSANT DANS LA THEORIE

DES TOURBILLONS STATIONNAIRES D'UN FLUIDE IDEAL

-o-

Enrique FERNANDEZ CARA

RESUME : On étudie dans cet article certaines questions apparaissant dans la Théorie des Tourbillons Stationnaires d'un Fluide Idéal en Equilibre. On pose pour un problème modèle général, on rappelle un théorème d'Existence, et l'on présente un schéma en éléments finis pour lequel on démontre aussi l'existence de solutions. On étudie ensuite la régularité du problème, et on décrit un algorithme qui utilise des propriétés de monotonicité. Finalement, on applique les résultats obtenus aux cas typiques des Anneaux Tourbillons et Doublets de tourbillons plans stationnaires.

ABSTRACT : In this paper we study some questions appearing in Steady Vortex Rings theory. Firstly, we set up a general model problem, we recall an Existence Theorem, and we present a Finite Element Scheme for which we also show the existence of solutions. Then, we consider the regularity of the problem, and we describe an algorithm in which monotonicity properties are used. Finally, the results are applied to typical examples of steady Vortex Rings and steady (plane) Vortex Pairs.

INTRODUCTION

Dans la Section 1 ci-dessous on rappelle les résultats de Berestycki [1] sur le problème continu considéré :

$$
(P) \quad \begin{cases} \underline{\text{Trouver}}\ u \in H^2(\Omega)\ \underline{\text{et}}\ \nu \in \mathbb{R}^1\ \underline{\text{satisfaisant}} : \\ \mathcal{L}u = g(x, u - \nu\rho(x))\ \underline{\text{dans}}\ \Omega, \\ u = 0\ \underline{\text{sur}}\ \Gamma = \partial\Omega, \\ a(u,u) \equiv \int_\Omega (\mathcal{L}u)u\, dx = \eta, \end{cases}
$$

et on applique ensuite des raisonnements similaires pour le problème discret (formulation par éléments finis) associé. On obtient ainsi des résultats d'existence après application, respectivement, des Théorèmes de Point-Fixe de Schauder et de Brower.

Dans la Section 2 on considère le problème de la différentiabilité de l'opérateur qui intervient dans chaque formulation. Par exemple, pour le cas continu, on peut formuler (P) sous la forme équivalente

$$
(R) \quad \begin{cases} \underline{\text{Trouver}}\ u \in H^1_0(\Omega)\ \underline{\text{tel que}} \\ \mathcal{L}u = R(u)\ \underline{\text{dans}}\ \Omega, \end{cases}
$$

où R est l'opérateur qui associe à chaque $v \in H^1_0(\Omega)$ la fonction $g(\cdot, v - \nu(v)\rho(\cdot))$ de $L^q(\Omega)$ ($q > 1$ fini et arbitraire si $N \leq 2$ et $q = \frac{2N}{N+2}$ si $n \geq 3$), et $v \to \nu(v)$, définie dans Berestycki [1] pour $v \geq 0$, est la fonction qui à chaque $v \in H^1_0(\Omega)$ associe l'unique solution (réellle) de l'équation

$$
\int_\Omega u \cdot g(x, v - \nu\rho(x))dx = \eta,
$$

avec

$$
(1) \quad \begin{cases} \mathcal{L}u = g(x, v - \nu\rho(x))\ \underline{\text{dans}}\ \Omega, \\ u = 0\ \underline{\text{sur}}\ \Gamma. \end{cases}
$$

Alors on démontre dans la Section 2 que l'opérateur $v \to R(v)$ est Fréchet-différentiable, et que sa différentielle est donnée par :

$$\begin{cases} R'(v)\cdot\delta v = g(\cdot,v-\nu(v)\rho(\cdot))\ \{\delta v - \dfrac{1}{\beta(v,\nu(v))}\times\displaystyle\int_\Omega u\cdot D_2 g(x,v-\nu(v)\rho(x))dx\} \\ \forall v\in H_o^1(\Omega),\quad \forall\ \delta v\in H_o^1(\Omega), \\ \underline{\text{avec}}\ \beta(v,\nu) = \displaystyle\int_\Omega u\cdot D_2 g(x,v-\nu\rho(x))\rho(x)dx\ \underline{\text{et}}\ u\in H_o^1(\Omega)\ \underline{\text{donnée par}}\ (1), \end{cases}$$

si certaines conditions de régularité sur g sont remplies. Cela permettra de résoudre (P), ou, ce qui est équivalent, le problème

$$(Q)\qquad \begin{cases} \underline{\text{Trouver}}\ u\in H_o^1(\Omega),\ \underline{\text{tel que}} \\ J(u) = \inf\limits_{v\in H_o^1(\Omega)} J(v),\ J(v) = a(v-\xi,v-\xi), \end{cases}$$

avec, dans (Q), ξ solution du problème

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}\xi = R(v)\ \underline{\text{dans}}\ \Omega, \\ \xi=0\ \underline{\text{sur}}\ \Gamma, \end{cases}$$

par la méthode du <u>gradient conjugué</u>, par exemple.

Dans la Section 3 on développe un algorithme itératif qui utilise certaines propriétés de monotonie du problème considéré. (Notons que les relations

$$\begin{cases} u_1,u_2\in H_o^1(\Omega),\ u_1\le u_2\ \text{p.p. dans}\ \Omega, \\ \nu_1,\nu_2\in\mathbb{R}^1,\quad \nu_1\ge\nu_2\ , \end{cases}$$

entrainent

$$g(x,u_1-\nu_1\rho(x)) \le g(x,u_1-\nu_2\rho(x))\ \underline{\text{p.p. dans}}\ \Omega,$$

et donc, si on appelle $S(u_1,\nu_1)$ et $S(u_2,\nu_2)$ les solutions correspondantes des problèmes de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = g(x,u_j-\nu_j\rho(x)) \ \underline{\text{dans}}\ \Omega \\ w=0\ \underline{\text{sur}}\ \Gamma, \end{cases}$$

on a, d'après le <u>Principe du Maximum</u>,

$$S(u_1,\nu_1) \leq S(u_2,\nu_2)\ \underline{\text{p.p. dans}}\ \Omega\ ;$$

cela va entrainer :

a) $g(\cdot,u_1-\nu_1\rho(\cdot)) \leq g(\cdot,u_2-\nu_2\rho(\cdot))$ <u>pour l'ordre partiel</u> "$\leq$" <u>naturel</u> dans $L^q(\Omega)$.

b) $\nu(u_1) \leq \nu(u_2))$.

Dans la Section 4 on considère deux cas typiques que ne verifient pas les hypothèses de la Section 2, et ne sont pas des "cas différentiables". On approche les problèmes correspondants par d'autres problèmes dans lesquels les hypothèses de différentiabilité sont vérifiées.

1. - FORMULATION DES PROBLEMES. EXISTENCE DES SOLUTIONS.

1.1. Le problème continu.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné "suffisamment régulier", et

$$\mathcal{L} = - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}\right) ,$$

avec $a_{ij} = a_{ji} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, et tel que si on pose

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

pour $u,v \in H_o^1(\Omega)$, on a

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad , \forall v \in H_o^1(\Omega), \alpha > 0.$$

Nous considérons le problème suivant :

(P) $\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^2(\Omega) \text{ et } \nu \in \mathbb{R}^1, \text{ satisfaisant :} \\ \mathcal{L}u = g(x, u-\nu\rho(x)) \text{ dans } \Omega, \\ u=0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega, \\ a(u,u) = \eta, \end{array}\right.$

où

(1) $\rho \in \mathcal{C}^o(\bar{\Omega})$, $\rho > 0$ dans Ω,

(2) $\eta > 0$ est une constante donnée,

(3) la fonction $(x,s) \to g(x,s)$ de $\Omega \times \mathbb{R}^1$ dans $\mathbb{R}^1$ vérifie :

(3a) $g \in \mathcal{C}^o(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^1)$, $g \geq 0$,

(3b) $\exists s_o \in \mathbb{R}^1$ tel que $g(x,s) = 0$ pour $x \in \bar{\Omega}$, $s \leq s_o$,

(3c) pour $x \in \bar{\Omega}$ fixé, la fonction $s \to g(x,s)$ est croissante, et strictement croissante dès que $g(x,s) > 0$

(3d) $\lim_{s\to+\infty} \frac{g(x,s)}{s^p} = 0$ uniformément en $x \in \overline{\Omega}$, avec :

$1 < p < +\infty$, si $N \leq 2$,

$1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, si $N \geq 3$,

(3e) $\lim_{s\to+\infty} g(x,s) = +\infty$, uniformément en $x \in \overline{\Omega}_o$, avec Ω_o ouvert non vide tel que $\Omega_o \subset \Omega$.

Remarque 1.1 : Nous pouvons aussi considérer un problème plus général que (P), avec une équation du type

$$\mathcal{L}u = g(x,u,\nu),$$

si l'on fait des hypothèses convenables sur la nouvelle fonction g ; voir la Remarque 1.5 et Berestycki [2]. ■

On prouve dans Berestycki [1] les résultats suivants :

Lemme 1.1.1. : Pour $\nu \in \mathbb{R}^1$ et $v \in H^1_o(\Omega)$ donnés, on définit

$$u = S(v,\nu)$$

comme l'unique solution de

$$(4) \quad \begin{cases} \mathcal{L}u = g(x,v-\nu\rho(x)) \text{ dans } \Omega \\ u=0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Sous les hypothèses (1)-(3e) ci-dessus sur la fonction g, nous avons :

(i) L'opérateur de Nemitskii $\phi \to g(\cdot,\phi)$ est compact de $H^1_o(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, où $q = \frac{2N}{N+2}$ si $N \geq 3$, et $q > 1$ est arbitraire si $N \leq 2$ (voir Berger [2]).

(ii) L'opérateur $(v,\nu) \to S(v,\nu)$ est compact de $H^1_o(\Omega) \times \mathbb{R}^1$ dans $H^1_o(\Omega)$. (C'est en fait un opérateur compact de $H^1_o(\Omega) \times \mathbb{R}^1$ dans $W^{2,q}(\Omega)$)

(iii) Si $\nu \leq \mu$, alors $S(v,\nu) \geq S(v,\mu) \geq 0$ p.p. dans Ω, $\forall v \in H^1_o(\Omega)$. ■

Lemme 1.1.2 : Dans tous les cas on a $H_o^1(\Omega) \subset L^{q'}(\Omega)$, avec $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, et q défini comme dans le Lemme 1.1.1. Nous pouvons donc définir

$$(5) \qquad \alpha(v,\nu) = \int_\Omega g(x,v-\nu\rho(x))S(v,\nu)dx$$

pour $v \in H_o^1(\Omega)$ et $\nu \in \mathbb{R}^1$, et la fonction

$$(6) \qquad (v,\nu) \to \alpha(v,\nu)$$

est continue de $H_o^1(\Omega) \times \mathbb{R}^1$ dans $[0,+\infty)$.

D'autre part, pour v fixé dans $H_o^1(\Omega)$, la fonction $\nu \to \alpha(v,\nu)$ est continue et décroissante de $\mathbb{R}^1$ dans $[0,+\infty)$, et strictement décroissante pour $\alpha(v,\nu) > 0$. ∎

Lemme 1.1.3 : Soit $K = \{v | v \in H_o^1(\Omega),\ v \geq 0$ p.p. dans $\Omega\}$. Alors, pour $v \in K$ fixé, on a :

$$(7) \qquad \lim_{\nu \downarrow -\infty} \alpha(v,\nu) \uparrow +\infty$$

$$(8) \qquad \lim_{\nu \uparrow +\infty} \alpha(v,\nu) \downarrow 0 \quad . ∎$$

Lemme 1.1.4 : Pour $v \in H_o^1(\Omega)$, $v \geq 0$, l'équation

$$\alpha(v,\nu) = \eta$$

(avec $\eta > 0$) a une solution unique $\nu = \nu(v)$. ∎

Lemme 1.1.5 : On définit, pour $v \in H_o^1(\Omega)$,

$$T^+(v) = S(v^+,\nu(v^+)),$$

où $v^+ = \max(v,0)$. Alors une fonction $u \in H_o^1(\Omega)$ est solution de (P) si et seulement si c'est un point-fixe de T^+. ∎

Lemme 1.1.6. : La fonction $v \to \nu(v^+)$ est bornée et continue de $H_o^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^1$. ∎

Remarque 1.2 : Nous pouvons aussi démontrer que la fonction $v \to \nu(v^+)$ est séquentiellement continue lorsqu'on munit $H_o^1(\Omega)$ de sa topologie faible. En effet, si $v_n \to v$ dans $H_o^1(\Omega)$-faible, alors $\{\|v_n\|\}$ est bornée, d'où

$\{\nu(v_n^+)\}$ est aussi bornée. On peut donc extraire une sous-suite (v_μ) de (v_n) tel que

$$\begin{cases} v_\mu \to v \text{ dans } L^{pq}(\Omega)\text{-fort} \\ \nu(v_\mu^+) \to \nu^* \text{ dans } \mathbb{R}^1 . \end{cases}$$

Le même raisonnement utilisé dans Berestycki [1] pour démontrer le Lemme 1.1.6 est valable ici, et on montre

a) $\nu^* = \nu(v^+)$

b) Toute la suite $(\nu(v_n^+))$ converge vers $\nu(v^+)$. ∎

Lemme 1.1.7 : L'opérateur $v \to T^+(v)$ est compact de $H_o^1(\Omega)$ dans lui-même, et il applique l'espace $H_o^1(\Omega)$ dans la portion de sphère

(9) $$D_\eta = \{v \mid v \in H_o^1(\Omega),\ v \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega,\ a(v,v) = \eta\} .$$ ∎

Théorème 1.1.1 : Etant donné le convexe fermé et borné $\overline{\mathcal{B}}$, avec

$$\mathcal{B} = \{v \mid v \in H_o^1(\Omega),\ a(v,v) < \eta+1\} ,$$

nous avons que l'opérateur T^+ applique $\overline{\mathcal{B}}$ dans $\mathcal{B}$.
Alors, d'après le Théorème du Point-Fixe de Schauder T admet un point fixe $u \in \mathcal{B}$; $u \in \mathcal{B}$ et $\nu = \nu(u)$ sont donc des solutions de (P).

1.2. Le problème discret.

Nous considérons maintenant une suite généralisée $\mathcal{H}$ convergeant vers 0 ($\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^s \setminus \{0\}$) et l'on associe une famille de triangulations $\{\mathcal{C}_h\ ;\ h \in \mathcal{H}\}$, de Ω (1). Pour simplifier, nous supposons que $\overline{\Omega}$ est un polygone de $\mathbb{R}^N$.
A $h \in \mathcal{H}$ fixé, nous aurons

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{C}_h} K .$$

Pour chaque $K \in \mathcal{C}_h$ nous considérons l'espace P_K, égal à $P_1(K)$ ou $P_2(K)$, où P_ℓ, avec ℓ entier ≥ 0, est l'espace de tous les polynomes de degré $\leq \ell$ dans les variables $x_1, x_2, \ldots, x_N$ (un polynome $p \in P_\ell$ est donc de la forme

(1) Nous considérons une famille régulière de triangulations $\{\mathcal{C}_h\}$, selon la terminologie de Ciarlet [1].

$$p : x = (x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{R}^N \to p(x) \in \mathbb{R}^1,$$

$$p(x) = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_N \le \ell} \gamma_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N} x_1^{\alpha_1}\dots x_N^{\alpha_N}) ,$$

et, d'une manière générale, si Φ est un espace de fonctions définies sur $\mathbb{R}^N$, et $A\subset\mathbb{R}^N$, nous appelons $\Phi(A)$ l'espace des restrictions à A des fonctions de Φ.

Nous allons donc considérer les éléments finis des types classiquement dénotés par P_1 et P_2.
La triangulation $\mathcal{T}_h$ est associée d'une façon naturelle à l'espace V_h des fonctions continues dans $\bar{\Omega}$ telles que leurs restrictions à chaque $K\in \mathcal{T}_h$ sont dans $P_K = P_\ell(K)$, $\ell=1$ ou 2, et elles sont égales à zéro sur Γ.

On sait bien que l'espace V_h est alors de dimension finie, et qu'il s'agit d'un sous-espace de $H_o^1(\Omega)$.
Posons

$$V_h = [w_1,w_2,\dots,w_m] \equiv \underline{\text{espace engendré par les}}\ w_j,\ 1\le j\le m,$$
$$m = N(h) = \dim (V_h).$$

Alors la façon la plus naturelle pour approcher le problème (P) donné dans (1.1) est la suivante :

$$(P_h)\quad \begin{cases} \underline{\text{Trouver}}\ v_h \in V_h\ \underline{\text{et}}\ \nu_h \in \mathbb{R}^1,\ \underline{\text{satisfaisant}} : \\ a(u_h,w_j) \equiv (\mathcal{L}u_h,w_j) = (g(\cdot,u_h-\nu_h\rho(\cdot)),w_j),\ 1\le j\le m , \\ a(u_h,u_h) \equiv (\mathcal{L}u_h,u_h) = \eta , \end{cases}$$

où $(\cdot,\cdot)$ dénoté le produit scalaire standard dans $L^2(\Omega)$.
Evidemment, (P_h) peut aussi être formulé comme suit :

$$(P_h')\quad \begin{cases} \underline{\text{Trouver}}\ \zeta_h \in \mathbb{R}^m\ \underline{\text{et}}\ \nu_h \in \mathbb{R}^1\ \underline{\text{satisfaisant}} : \\ A_h\zeta_h = b_h(\zeta_h,\nu_h), \\ (\zeta_h,b(\zeta_h,\nu_h)) = \eta , \end{cases}$$

où A_h est la matrice

$$A_h = (a(w_i,w_j))_{i,j=1}^m ,$$

et $b_h(\zeta_h,\nu_h)$ est le vecteur de composantes

$$b_h^j(\zeta_h,\nu_h) = (g(\cdot,u_h-\nu_h\rho(\cdot)),w_j) ,$$

avec $u_h = \sum_{i=1}^m \zeta_h^i w_i$; nous avons aussi noté $(\cdot,\cdot)$ dans (P_h') pour désigner le produit scalaire dans $\mathbb{R}^m$.

Notons que la matrice A_h est toujours définie positive, d'où, pour chaque $b \in \mathbb{R}^m$, il existe une solution unique du système $A_h\zeta = b$.
On supposera dans la suite que A_h est une matrice de classe monotone, c'est-à-dire, que A_h^{-1} a tous ses éléments non-négatifs (voir la <u>Remarque 1.6</u>).

<u>Lemme 1.2.1</u> : <u>Soit, pour</u> $\xi \in \mathbb{R}^m$ <u>et</u> $\nu \in \mathbb{R}^1$ <u>donnés</u>, $\zeta = S_h(\xi,\nu)$ <u>l'unique solution du système</u>

$$A_h\zeta = b_h(\xi,\nu).$$

On a alors :

(i) L'application $(\xi,\nu) \to S_h(\xi,\nu)$ est continue de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1$ dans $\mathbb{R}^m$.
(ii) Pour $\xi \in \mathbb{R}^m$ fixé, nous avons

$$\nu \le \mu \implies S_h(\xi,\nu) \ge S_h(\xi,\mu) \ge 0 .$$

<u>Démonstration</u> :
(i) Il suffit de remarquer que l'application $(\xi,\nu) \to S_h(\xi,\nu)$ est obtenue par composition des applications suivantes :

$$(\xi,\nu) \to \sum_{i=1}^m \xi^i w_i - \nu\rho(\cdot) \text{ , de } \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1 \text{ dans } H^1(\Omega),$$

$$u \to g(\cdot,u) \text{ , de } H^1(\Omega) \text{ dans } L^q(\Omega),$$

$$f \to \{(f,w_j) \mid 1 \le j \le m\} \text{ , de } L^q(\Omega) \text{ dans } \mathbb{R}^m,$$

$$b \to A_h^{-1}b \text{ , de } \mathbb{R}^m \text{ dans lui-même.}$$

(ii) C'est une conséquence triviale de la monotonie de la fonction $s \to g(x,s)$ pour chaque $x \in \bar{\Omega}$ et de la monotonie de A_h^{-1}. ∎

Lemme 1.2.2 : Posons

$$\alpha_h(\xi,\nu) = (A_h S_h(\xi,\nu), S_h(\xi,\nu))$$

pour $\xi \in \mathbb{R}^m$ et $\nu \in \mathbb{R}^1$. Alors la fonction $(\xi,\nu) \to \alpha_h(\xi,\nu)$ est continue de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1$ dans $[0,+\infty)$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^m$ fixé, la fonction $\nu \to \alpha_h(\xi,\nu)$ est décroissante, et strictement décroissante pour $\alpha_h(\xi,\nu) > 0$.

Démonstration :
La continuité et la décroissance sont triviales à montrer. D'autre part, si $\alpha_h(\xi,\nu) > 0$, il existera une composante de $A_h S_h(\xi,\nu) = b_h(\xi,\nu)$, soit $b_h^j(\xi,\nu)$, strictement positive. Cela signifie que $b_h^j(\xi,\mu) < b_h^j(\xi,\nu)$ si $\mu > \nu$, tandis que pour celles avec $k \neq j$, on a $b_h^k(\xi,\mu) \leq b_h^j(\xi,\nu)$, d'où le résultat. ∎

Lemme 1.2.3 : Soit $\xi \in \mathbb{R}^m$. On a, pour h assez petit

(i) $\lim\limits_{\nu \downarrow -\infty} \alpha_h(\xi,\nu) \uparrow +\infty$,

(ii) $\lim\limits_{\nu \uparrow +\infty} \alpha_h(\xi,\nu) \downarrow 0$.

Remarque 1.3 : En fait (ii) est toujours vérifié, indépendemment de la valeur de h. ∎

Démonstration :
Compte tenu de la monotonie de la fonction

$$\nu \to \alpha_h(\xi,\nu),$$

il suffit de raisonner pour des suites.
(ii) Soit $(\nu^n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $\nu^n \uparrow +\infty$. La fonction $\sum_{i=1}^{m} \xi^i w_i$ étant bornée, nous aurons :

$$\sum_{i=1}^{m} \xi^i w_i - \nu^n \rho \to -\infty \ \text{p.p. dans } \Omega,$$

d'où

$$g(x, \sum_{i=1}^{m} \xi^i w_i - \nu^n \rho(x)) \to 0 \text{ \underline{p.p. dans} } \Omega,$$

et, d'après le Théorème de la Convergence Monotone de Lebesgue, on déduit $b_h(\xi,\nu^n) \downarrow 0$, d'où le résultat.

(i) Soit maintenant $\nu^n \downarrow -\infty$.
Nous savons qu'il existe $\Omega_o \subset \Omega$, ouvert non vide, tel que $g(\cdot,x) \to +\infty$ lorsque $s \to +\infty$ uniformément dans Ω_o. Si h est assez petit et nous avons choisi la famille de triangulations $\{\mathcal{C}_h\}$ régulière, il existe une union finie, non vide, F_h d'éléments finis (fermée) telle que $F_h \subset \Omega_o$.

Posons

$$r^j_{h,n} = b^j_h(\zeta,\nu^n) \text{ si supp } w_j \subset F_h, \text{ et}$$
$$r^j_{h,n} = 0, \text{ autrement ;}$$

soit g^n_h la solution du système $A_h g^n_h = r_{h,n}$.
Alors il est évident que

$$\alpha_h(\xi,\nu^n) \geq (A_h g^n_h, g^n_h) = (r_{h,n}, g^n_h) ,$$

et que $(r_{h,n}, g^n_h) \uparrow +\infty$, d'où le résultat. ■

<u>Lemme 1.2.4</u> : <u>Pour</u> $\xi \in \mathbb{R}^m$ <u>nous pouvons définir</u> $\nu_h = \nu_h(\xi)$ <u>comme l'unique solution de l'équation</u>

$$\alpha_h(\xi,\nu) = \eta .$$

<u>Démonstration</u> :
Ce résultat n'est qu'une conséquence immédiate des Lemmes 1.2.2 et 1.2.3. ■

<u>Lemme 1.2.5</u> : <u>On définit, pour</u> $\xi \in \mathbb{R}^m$,

$$T^+_h(\xi) = S_h(\xi^+, \nu_h(\xi^+)),$$

avec $\xi^+ = (\xi^{j+})^m_{j=1}$, et $\xi^{j+} = \max(\xi^j, 0)$, $1 \leq j \leq m$. Alors $\xi \in \mathbb{R}^m$ est solution de (P'_h) si et seulement si ξ est un point-fixe de l'opérateur T^+_h.

Démonstration :

En effet, si ξ est solution de (P'_h), puisque les composantes de $A_h\xi$ sont non-négatives, on a $\xi^+ = \xi$; donc, le vecteur ξ vérifie

$$A_h\xi = b_h(\xi^+, \nu_h(\xi^+)),$$

c'est-à-dire, $T_h^+(\xi) = \xi$.

Réciproquement, la relation

$$T_h^+(\xi) \equiv S_h(\xi^+, \nu_h(\xi^+)) = \xi$$

entraîne $\xi^j \geq 0$, $1 \leq j \leq m$, car dans ce cas $A_h\xi$ est un vecteur de composantes ≥ 0. Nous avons donc encore $\xi = \xi^+$, et

$$A_h\xi = b_h(\xi, \nu_h(\xi)),$$

d'où ξ et $\nu_h(\xi)$ sont des solutions de (P'_h). ∎

Lemme 1.2.6. : La fonction $\xi \to \nu(\xi^+)$ est bornée et continue de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^1$.

Démonstration :

Montrons en premier lieu que $\xi \to \nu(\xi^+)$ est bornée. Supposons qu'il existe $(\xi_n)_{n\geq 0}$, telle que

$$|\xi_n| \leq R, \ \forall n \geq 0 \quad \text{et} \quad |\nu_h(\xi_n^+)| \to +\infty .$$

a) Supposons que $\nu_h(\xi_n^+) \to +\infty$. Alors

$$g(x, \sum_{i=1}^{m} \xi_n^{i+} w_i - \nu_h(\xi_n^+)\rho(x)) \to 0 \text{ p.p. dans } \Omega,$$

et d'après le Théorème de Lebesgue,

$$b_h^j(\xi_n^+, \nu_h(\xi_n^+)) \to 0 \ , \quad 1 \leq j \leq m$$

et

$$S_h(\xi_n^+, \nu_h(\xi_n^+)) \to 0 \ .$$

Mais cela entraîne

$$\eta = (S_h(\xi_n^+,\nu_h(\xi_n^+)),\ b_h(\xi_n^+,\nu_h(\xi_n^+)) \to 0.$$

b) Si $\nu_h(\xi_n^+) \to -\infty$, un nouveau raisonnement de monotonie, analogue à celui qui a été utilisé dans le Lemme 1.2.3, (i), montre $\eta \to +\infty$. ∎

Montrons maintenant qu'il s'agit d'une application continue. Supposons que $\xi_n \to \xi$ dans $\mathbb{R}^m$. Alors, la suite $(\nu_h(\xi_n^+))_{n\geq 0}$ étant bornée, il existe une sous-suite $(\nu_h(\xi_\mu^+)) = (\nu_\mu)$ qui converge dans $\mathbb{R}^1$ vers ν.
Nous aurons donc :

$$\alpha_h(\xi^+,\nu) = (S_h(\xi^+,\nu),b_h(\xi^+,\nu)) = \lim_{\mu\to\infty} (S_h(\xi_\mu^+,\nu_\mu),b_h(\xi_\mu^+,\nu_\mu)),$$

par application du <u>Théorème de la Convergence Dominée de Lebesgue</u>. Mais cela implique $\alpha_h(\xi^+,\nu) = \eta$, d'où $\nu = \nu_h(\xi^+)$.

Notons que ce même raisonnement peut être appliqué à toute sous-suite de $(\nu_n)_{n\geq 0}$; c'est-à-dire, de toute sous-suite de $(\nu_n)_{n\geq 0}$ on peut extraire une sous-suite convergente vers $\nu_h(\xi^+)$, et donc toute la suite $(\nu_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\nu_h(\xi^+)$, d'où le résultat. ∎

<u>Théorème 1.2.1</u> : <u>L'application</u> $\xi \to T_h^+(\xi)$ <u>est continue et elle applique le convexe compact</u> $\overline{\mathcal{B}}_h$, où

$$\mathcal{B}_h = \{\xi | \xi \in \mathbb{R}^m,\ (A_h\xi,\xi) < \eta+1,\ \xi^j \geq 0\}$$

<u>dans</u> $\mathcal{B}_h$. <u>Donc, d'après le Théorème du Point-Fixe de Brouwer, l'opérateur</u> T_h^+ <u>possède un point-fixe</u> $\zeta_h \in \mathcal{B}_h$; <u>alors</u> $(\zeta_h,\nu_h(\zeta_h))$ <u>est une solution de</u> (P_h'), <u>et la fonction</u>

$$u_h = \sum_{i=1}^m \zeta_h^i w_i$$

<u>et la valeur</u> $\nu_h(\zeta_h)$ <u>sont des solutions de</u> (P_h).

Démonstration :

Ce résultat n'est qu'une conséquence immédiate des précédentes. ∎

Remarque 1.4 : Nous pouvons aussi considérer (ce que nous ferons effectivement du point de vue numérique), un problème analogue, mais avec intégration numérique :

$$(P_h^*) \quad \begin{cases} \underline{\text{Trouver}}\ u_h^* \in V_h\ \underline{\text{et}}\ \nu_h^* \in \mathbb{R}^1,\ \underline{\text{tels que}} : \\ (\mathcal{L}u_h^*, w_j)_h = (g(\cdot, u_h^* - \nu_h^* \rho(\cdot)), w_j)_h, \quad 1 \le j \le m \\ a_h(u_h^*, u_h^*) \equiv (\mathcal{L}u_h^*, u_h^*)_h = \eta \end{cases}$$

où nous avons noté $(\cdot,\cdot)_h$ le produit scalaire (dans $\mathbb{R}^m$) associé à une formule de quadrature, exacte pour des polynomes de degré $\le \ell$.

Ainsi, pour $\ell=1$, il suffit de choisir la formule de degré 1 :

"On pose pour $\hat{K} \in \mathcal{C}_h$, élément fini de référence,

$$\int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x})d\hat{x} \sim \frac{1}{3}\,\mathrm{mes}(\hat{K})\hat{\phi}(\hat{b}_{\hat{K}}) \ ,$$

si $\hat{\phi} \in \mathcal{C}^o(\hat{K})$, où $\hat{b}_{\hat{K}}$ est le barycentre de $\hat{K}$, et puis on détermine par rapport à $\hat{K}$ les approximations correspondantes des $\int_K \phi(x)dx$, avec $\phi \in \mathcal{C}^o(K)$".

De façon analogue, pour $\ell=2$, nous utiliserons la formule de Simpson (nous considérons ici le cas N=2) :

On pose, pour $\hat{K} \in \mathcal{C}_h$, élément fini de référence,

$$\int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x})d\hat{x} \sim \frac{1}{3}\,\mathrm{mes}\ (\hat{K}) \sum_{1\le i\le j\le 3} \hat{\phi}(\hat{b}_{ij,\hat{K}}) \ ,$$

si $\hat{\phi} \in \mathcal{C}^o(\hat{K})$, où les points $\hat{b}_{ij,\hat{K}}$ sont les milieux des côtés du triangle $\hat{K}$.

Notons que nous avons toujours

$$a_h(u_h,v_h) \equiv (\mathcal{L}u_h,v_h)_h = (\mathcal{L}u_h,v_h)_h = (\mathcal{L}u_h,v_h) \equiv a(u_h,v_h),$$

pour $u_h, v_h \in V_h$.

De la même façon que dans le Lemme 1.2.1, nous pouvons maintenant définir $S_h^*(\xi,\nu)$, pour $\xi \in \mathbb{R}^m$ et $\nu \in \mathbb{R}^1$, comme l'unique solution du système

$$A_h\zeta = b_h^*(\xi,\nu) ,$$

où $b_h^*(\xi,\nu)$ est le vecteur de composantes

$$b_h^{*j}(\xi,\nu) = (g(\cdot, \sum_{i=1}^{m} \xi^i w_i - \nu\rho(\cdot)), w_j)_h,$$

puis nous pouvons poser

$$\alpha_h^*(\xi,\nu) = (S_h^*(\xi,\nu), b_h^*(\xi,\nu))$$

et définir, pour $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\nu_h(\xi)$ comme l'unique solution de l'équation

$$\alpha_h^*(\xi,\nu) = \eta \;;$$

finalement, nous pouvons définir l'opérateur T_h^{*+} de $\mathbb{R}^m$ dans lui-même comme

$$T_h^{*+}(\xi) = S(\xi^+, \nu_h^*(\xi^+)).$$

Tous ces résultats précédents restent valables et, en particulier, le problème (P_h^*) (et donc aussi le problème

$$(P_h') \quad \begin{cases} \underline{\text{Trouver}}\ \zeta_h^* \in \mathbb{R}^m\ \underline{\text{et}}\ \nu_h^* \in \mathbb{R}^1,\ \underline{\text{satisfaisant}} : \\ A_h\zeta_h^* = b_h^*(\zeta_h^*, \nu_h^*) , \\ (A_h\zeta_h^*, \zeta_h^*) = \eta) , \end{cases}$$

a une solution $u_h^* = \sum_{i=1}^{m} \zeta_h^{*i} w_i$, $\nu_h^* = \nu_h^*(\zeta_h^*)$. ∎

<u>Remarque 1.5</u> : Les problèmes (P), (P_h) et (P_h^*) peuvent être généralisés au cas dont la fonction g est remplacée par <u>une fonction</u>

$$(x,s,\nu) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to G(x,s,\nu) \in \mathbb{R}^1$$

<u>continue et</u> ≥0, <u>qui vérifie</u>

(a) Il existe ϕ : $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1_+$ continue, telle que :

$$\lim_{s^2+\nu^2} \frac{G(x,s,\nu)}{\phi(s,\nu)} = 0 \text{ , uniformément en } x \in \overline{\Omega}, \text{ et}$$

$$\phi(s,\nu) \leq C_1|s|^p + C_2|\nu|^\alpha + C_3 \text{ , } C_1,C_2,C_3 > 0, \ \alpha > 1$$

et p comme dans (3d).

(b) Pour $x \in \overline{\Omega}$, $s \in \mathbb{R}^1$, la fonction $\nu \to G(x,s,\nu)$ est (par exemple) décroissante, et strictement décroissante dès que $G(x,s,\nu) > 0$.

(c) Il existe $\nu_o \in \mathbb{R}^1$, tel que $G(x,s,\nu) = 0$ pour $x \in \overline{\Omega}$, $s \in \mathbb{R}^1$ et $\nu \geq \nu_o$.

(d) $\lim\limits_{\nu \to -\infty} G(x,s,\nu) = +\infty$, $\forall x \in \overline{\Omega}$ et $\forall s \in \mathbb{R}^1$.

(e) Pour chaque $x \in \overline{\Omega}$ et $\nu \in \mathbb{R}^1$, la fonction $s \to G(x,s,\nu)$ est croissante.

En général, on retrouve des résultats similaires à ceux de (1.1) et (1.2). ∎

Remarque 1.6. : On reviendra plus tard sur le problème de la monotonie de A_h^{-1}. Notons pour l'instant que dans les cas "typiques" avec $\mathcal{L} = -\Delta$, $\ell=1$, cette condition est effectivement vérifiée (voir, par exemple, Ciarlet-Raviart [1], Fujii [1]) si la triangulation choisie remplit certaines conditions. Un autre exemple typique est fournit par l'opérateur (N=2) :

$$\mathcal{L} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) - \frac{1}{x_1}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} .$$

Si $\overline{\Omega} \subset \{x = (x_1,x_2)/x_1 > 0\}$ (ce qui corespond à des situations physiques envisagées), on peut trouver des conditions sur la triangulation qui feront de A_h une M-matrice (voir RUAS [1]). ∎

APPENDICE A LA SECTION 1

Nous prouvons maintenant que le Lemme 1.1.3 reste vrai sans imposer $v \geq 0$ p.p. dans Ω :

Lemme 1.1.3' : Soit $v \in H_o^1(\Omega)$; on a alors :

(i) $\lim\limits_{\nu \downarrow -\infty} \alpha(v,\nu) \uparrow +\infty$

(ii) $\lim\limits_{\nu \uparrow +\infty} \alpha(v,\nu) \downarrow 0$.

Démonstration :

(i) Si $\nu < \mu$, on a $\alpha(v,\nu) \geq \alpha(v,\mu)$. Il suffit donc de raisonner séquentiellement. Soit $(\nu^n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{R}^1$ qui converge de façon monotone vers $-\infty$: $\nu^n \downarrow -\infty$. Alors p.p. dans Ω on a

(1') $$v(x)-\nu^n\rho(x) \uparrow +\infty ,$$

d'où

(2') $$g(x,v-\nu^n\rho(x)) \uparrow +\infty \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Supposons qu'on n'a pas (i). Alors, d'après la croissance de la suite $(\alpha(v,\nu^n))_{n\geq 0}$, on aura

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha(v,\nu^n) = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega S(v,\nu^n)\cdot g(x,v-\nu^n\rho(x))dx = \alpha^* \in \mathbb{R}^1 .$$

Mais alors le Théorème de Lebesgue de la Convergence Monotone entraîne la convergence des $S(v,\nu^n)\cdot g(\cdot,v-\nu^n\rho(\cdot))$, dans $L^1(\Omega)$ et p.p. dans Ω, vers

(3') $$\sup_{n\geq 0} [S(v,\nu^n)\cdot g(\cdot,v-\nu^n\rho(\cdot))] .$$

D'autre part, si on appelle u^n à la fonction $S(v,\nu^n)$, on déduit

$$a(u^n,u^n) \uparrow \alpha^* ,$$

d'où il existe une sous-suite (u^μ) de (u^n) qui converge dans $H_o^1(\Omega)$-faible, dans $L^{pq}(\Omega)$ et p.p. dans Ω vers une fonction $u^* \in H_o^1(\Omega)$.

Comme $u^n \leq u^m$ pour $n < m$, on a $u^n \uparrow u^*$ p.p. dans Ω, et de (2')-(3') on déduit $u^* = 0$ p.p. dans Ω.
Mais cela entraîne $u^n = 0$ p.p. dans Ω, $\forall n \geq 0$, d'où, d'après (3e), il existera $s_1 \in \mathbb{R}^1$, tel que

(4') $\qquad v - \nu^n \rho(x) \leq s_1$ p.p. dans Ω_o,

pour chaque $n \geq 0$.

On a donc

$$v(x) \leq s_1 + \nu^n \rho(x), \quad \forall n \geq 0,$$

dans un sous-ensemble $\Omega_o \setminus Z$ de Ω, avec Z de mesure nulle. Naturellement, cela contredit l'appartenance de v à $H^1_o(\Omega)$.

(ii) La démonstration donnée dans Berestycki [1] de ce résultat n'utilise pas la "positivité" de v.

Remarque 1.7 : Noter que dans le Lemme 1.1.3' on n'a utilisé que l'hypothèse $v \in L^{pq}(\Omega)$. ■

Conséquence : Nous pouvons démontrer à partir du lemme précédent de la même façon que dans Berestycki [1] les résultats suivants :

Lemme 1.1.4' : Pour $v \in H^1_o(\Omega)$, l'équation $\alpha(v,\nu) = \eta$ (avec $\eta > 0$) a une solution unique $\nu = \nu(v)$. ■

Lemme 1.1.5' : Si l'on pose, pour $v \in H^1_o(\Omega)$,

$$T(v) = S(v, \nu/v)),$$

le couple $(u,\nu) \in H^1_o(\Omega) \times \mathbb{R}^1$ sera solution de (P) si et seulement si $T(u) = u$, $\nu = \nu(u)$. ■

Lemme 1.1.6' : La fonction $v \to \nu(v)$ est bornée, continue et séquentiellement faiblement continue de $H^1_o(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^1$. ■

Lemme 1.1.7' : L'opérateur $v \to T(v)$ de $H^1_o(\Omega)$ dans lui-même est compact, et il applique $H^1_o(\Omega)$ dans la portion de sphère D_η, définie par (9). ■

Théorème 1.1.1' : T applique $\bar{\mathcal{B}}$ dans $\mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ est donné par (10). Donc, d'après le Théorème de Schauder, T admet un point-fixe $u \in \mathcal{B}$; $(u,\nu(u))$ est une solution de (P).

Démonstration du Lemme 1.1.6' :
Soit $(v_n)_{n\geq 0} \subset H^1_o(\Omega)$, $\|v_n\| \leq R$, une suite telle que $(\nu(v_n))_{n\geq 0}$ vérifie $|\nu_n| = |\nu(v_n)| \to +\infty$.

a) Supposons d'abord $\nu_n \to +\infty$.
Comme $H^1_o(\Omega) \subset L^{pq}(\Omega)$ avec injection compacte, on peut supposer

(5') $\qquad v_n \to v \in H^1_o(\Omega)$, dans $H^1_o(\Omega)$-faible,

(6') $\qquad v_n \to v$ dans $L^{pq}(\Omega)$ et p.p. dans Ω.

D'après la réciproque du Théorème de Lebesgue (voir Bourbaki [1]), il existe $\psi \in L^{pq}(\Omega)$, tel que

$$|v_n| \leq \psi \text{ p.p. dans } \Omega, \quad \forall n \geq 1.$$

Alors

$$g(\cdot,v_n-\nu_n\rho(\cdot)) \to 0 \text{ dans } L^q(\Omega),$$

car on a :

$$0 \leq g(x,v_n-\nu_n\rho(x)) \leq g(x,|v_n|-\nu_n\rho(x)) \leq g(x,\psi(x)) \text{ p.p. dans } \Omega ,$$

avec $g(\cdot,\psi(\cdot)) \in L^q(\Omega)$, et

(7') $\qquad g(x,v_n-\nu_n\rho(x)) \to 0$ p.p. dans Ω.

Cela entraîne

$$u_n = S(v_n,\nu_n) \to 0 \text{ dans } W^{2,q}(\Omega)$$

(et donc dans $H^1_o(\Omega)$ et dans $L^{q'}(\Omega)$), d'où

$$\eta = \int_\Omega u_n \cdot g(x,v_n-\nu_n\rho(x))dx \to 0,$$

ce qui est absurde.

b) Soit maintenant $\nu_n \to -\infty$. Si l'on prend des sous-suites de (v_n), (ν_n), et l'on fait un léger changement de notations, on a :

(5') $\qquad v_n \to v$ dans $H_o^1(\Omega)$-faible,

(6') $\qquad v_n \to v$ dans $L^{pq}(\Omega)$ et p.p. dans Ω,

(8') $\qquad \nu_n \downarrow -\infty$ (dans $\mathbb{R}^1$).

On peut alors répéter la démonstration du Lemme 1.1.3', (i) d'où

$$\eta = \int_\Omega u_n \cdot g(x,v_n-\nu_n\rho(x))dx \geq \int_\Omega \phi_n \cdot g(x_1-\psi-\nu_n\rho(x))dx \ ,$$

avec $\phi_n = S(\psi,\nu_n)$ (Noter que ϕ_n est bien définie d'après la Remarque 1.7, car $\psi \in L^{pq}(\Omega)$), et

$$\int_\Omega \phi_n \cdot g(x_1-\psi-\nu_n\rho(x))dx \to +\infty \ ,$$

ce qui est absurde. ∎

Remarque 1.8 : On peut procéder de façon analogue dans le cas discret. En particulier, on peut définir pour $\xi \in \mathbb{R}^m$ les vecteurs

$$T_h(\xi) = S_h(\xi,\nu_h(\xi))$$

et

$$T_h^*(\xi) = S_h^*(\xi,\nu_h^*(\xi)),$$

et alors les opérateurs $\xi \to T_h(\xi)$ et $\xi \to T_h^*(\xi)$, de $\mathbb{R}^m$ dans lui-même , resteront continus. ∎

2. - DIFFERENTIABILITE.

2.1. Le cas continu.

Pour l'instant nous allons considérer les cas où N=2 ou 3. Nous allons supposer que la fonction g de 1.1 vérifie aussi les hypothèses suivantes :

(3f) Pour presque tout $x \in \Omega$, la fonction $s \to g(x,s)$ est différentiable dans $\mathbb{R}^1$, et la fonction $s \to D_2g(x,s)$ est continue de $\mathbb{R}^1$ dans lui-même (noter qu'elle doit donc prendre des valeurs ≥ 0). De plus, on suppose que pour tout $s \in \mathbb{R}^1$ la fonction $x \to D_2g(x,s)$, définie p.p. dans Ω, est intégrable.

(3g) La fonction D_2g vérifie la propriété suivante :

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{D_2g(x,s)}{s^{p^*}} = 0 \text{ , uniformément en } x \in \overline{\Omega},$$

avec $1 < p < +\infty$ si N=2 et $1 < p^* \leq 4$ si N=3.

Considérons l'équation

$$(1) \qquad \alpha(v,\nu) \equiv \int_\Omega S(v,\nu)\cdot g(x,v-\nu\rho(x))dx = \eta$$

Nous savons que a $v \in H_0^1(\Omega)$ donné il existe une unique solution $\nu = \nu(v)$ de (1). D'autre part, la fonction $(v,\nu) \to \alpha(v,\nu)$ est continue de $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}^1$ dans $[0,+\infty)$. Notre intention va être d'appliquer le Théorème de la Fonction Implicite dans (1), et puis de déterminer les propriétés de la fonction $v \to \nu(v)$, que nous savons déjà continue et même séquentiellement faiblement continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^1$.

Soit donc $v_o \in H_0^1(\Omega)$ et $\nu_o = \nu(v_o)$. Considérons d'abord la fonction

$$(2) \qquad \nu \to \alpha(v_o,\nu),$$

continue de $\mathbb{R}^1$ dans $0,+\infty)$. Naturellement, il existe un voisinage N_o de ν_o, tel que $\alpha(v,\nu) > 0$ pour $\nu \in N_o$, d'où (2) est strictement décroissante dans N_o.

Nous avons aussi

$$\alpha(v_o,\nu) = \int_\Omega f(x,v_o(x),\nu)dx,$$

où $f(x,v_o(x),\nu) = S(v_o,\nu)\cdot g(x,v_o-\nu\rho(x))$, pour $x\in\Omega$ et $\nu\in N_o$. Evidemment, quel que soit $\nu\in N_o$, la fonction

$$x \to f(x,v_o(x),\nu)$$

est intégrable.

Montrons maintenant que <u>pour presque tout</u> $x\in\Omega$, <u>la fonction</u>

$$\nu \to f(x,v_o(x),\nu)$$

<u>est différentiable dans</u> N_o.

Pour cela il suffira de voir que <u>pour presque tout</u> $x\in\Omega$, <u>les fonctions</u>

(3) $$\nu \to S(v_o,\nu)(x)$$

et

(4) $$\nu \to g(x,v_o(x)-\nu\rho(x))$$

<u>sont différentiables dans</u> N_o.

Pour (4) cette affirmation est claire, compte tenu de (3f) ; et il est également clair que la dérivée de la fonction (4) est donnée par :

$$\nu \to -D_2g(x,v_o(x)-\nu\rho(x))\cdot\rho(x).$$

Alors, pour $\nu\in N_o$, et μ <u>assez petit</u>, nous avons pour presque tout $x\in\Omega$,

$$g(x,v-(\nu+\mu)\rho(x))-g(x,v-\nu\rho(x)) = -\mu D_2g(x,v_o(x)-\nu^*(x)\rho(x))\rho(x)$$

où la fonction $\nu^* = \nu^*(x)$, <u>définie p.p. dans</u> Ω, prend des valeurs comprises entre ν et $\nu+\mu$.

On déduit donc que <u>les valeurs des intégrales</u>

$$\int_\Omega \left|\frac{1}{\mu}(g(x,v_o-(v+\mu)\rho(x))-g(x,v_o-\nu\rho(x))+\rho(x)\cdot D_2g(x,v_o(x)-\nu\rho(x))\right|^q dx =$$

$$= \int_\Omega \rho(x)\left|D_2g(x,v_o(x)-\nu\rho(x))-D_2g(x,v_o(x)-\nu^*(x)\rho(x))\right|^q dx,$$

où $q>1$ et fini est arbitraire si N=2, et $q = 6/5$, si N=3, convergent vers zéro, lorsque $\mu\to 0$, d'après (3g) et le Théorème de Lebesgue de la Convergence Majorée.

En conséquence, d'après l'estimation dans L^q (cf. Agmon-Douglis-Niremberg [1]),

$$\frac{1}{\mu}\{S(v_o,\nu+\mu)-S(v_o,\nu)\}$$

converge dans $W^{2,q}(\Omega)$ (et donc dans $H^1_o(\Omega)$ et $L^{q'}(\Omega)$) vers la solution $-Q(v_o,v)$ du problème de Dirichlet :

$$\mathcal{L}w = -D_2g(x,v_o-\nu\rho(x))\cdot\rho(x) \text{ dans } \Omega$$

$$w=0 \text{ sur } \Gamma.$$

Cela signifie que la fonction (3) est aussi différentiable pour presque tout $x\in\Omega$, et que la fonction

$$x \to D_3f(x,v_o(x),\nu)$$

est intégrable pour tout $\nu\in N_o$.

Pour prouver la différentiabilité de la fonction (2) dans N_o il reste seulement à montrer qu'il existe une fonction $F_1\in L^1(\Omega)$ telle que :

(5) $$|D_3f(x,v_o(x),\nu)| \le F_1(x)$$

p.p. $x\in\Omega$ et $\forall\nu\in N_o$.

Mais si l'on a choisi N_o borné, alors les fonctions $g(\cdot,v_o-\nu\rho(\cdot))$ et $D_2g(\cdot,v_o-\nu\rho(\cdot))$ sont dans un borné de $L^q(\Omega)$(2), et donc $S(v_o,\nu)$ et $Q(v_o,\nu)$ sont dans un borné de $L^{q'}(\Omega)$, ce qui entraîne que la fonction

(6) $$x \to D_3f(x,v_o(x),\nu) = -Q(v_o,\nu)\ g(x,v_o-\nu\rho(x))-S(v_o,\nu)D_2g(x,v_o-\nu\rho(x))\rho(x)$$

---

(2) Les applications $v\in H^1(\Omega)\to g(\cdot,v)\in L^q(\Omega)$ et $v\in H^1(\Omega)\to D_2g(\cdot,v)\in L^q(\Omega)$ sont continues, bornées et compactes (voir Berestycki [1] et Berger [2]), et $\rho\in L^\infty(\Omega)$.

est bornée dans $L^1(\Omega)$ quand $\nu \in N_o$, et donc (5).

D'après le Théorème de Dérivation des Fonctions Intégrales par rapport à un paramètre, nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.1.1 : La fonction $\nu \to (v_o,\nu)$ est différentiable dans un voisinage N_o de $\nu_o = \nu(v_o)$. Sa dérivée est donnée par :

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial\nu}(v_o,\nu) = -\displaystyle\int_\Omega [Q(v_o,\nu)\cdot g(x,v_o-\nu\rho(x))+S(v_o,\nu)\cdot D_2g(x,v_o-\nu\rho(x))\cdot\rho(x)]\,dx = \\ \qquad = -2\displaystyle\int_\Omega S(v_o,\nu)\cdot D_2g(x,v_o-\nu\rho(x))\rho(x)\,dx. \end{cases}$$

De plus, la fonction

$$(8)\qquad \nu \to \frac{\partial\alpha}{\partial\nu}(v_o,\nu)$$

est continue ($\alpha(v_o,\nu)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ dans N_o) et elle prend des valeurs strictement négatives dans N_o.

Démonstration :
Nous avons déjà prouvé les deux premières affirmations (la deuxième égalité de (7) n'est qu'une conséquence triviale du fait que $\mathcal{L}$ est auto-adjoint).
D'autre part, la continuité de (8) résulte de (3g) et du fait que l'opérateur $v \to D_2g(\cdot,v)$ est continue de $L^{p^*q}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

La fonction (8) étant continue, (2) est de classe $\mathcal{C}^1$ dans N_o, et donc absolument continue ; comme elle est aussi strictement décroissante si l'on a choisi N_o tel que $\alpha(v_o,\nu) > 0$ dans N_o, on a nécessairement

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\nu}(v_o,\nu) < 0 \ , \quad \forall\nu \in N_o. \ \blacksquare$$

Nous pouvons encore améliorer la propriété de continuité de (8) :

Lemme 2.1.1 : La fonction $(v,\nu) \to \frac{\partial\alpha}{\partial\nu}(v,\nu)$, définie sur un voisinage de (v_o,ν_o) (par exemple de la forme $u_o\times N_o$), et à valeurs dans $(-\infty,0]$, est continue.

Démonstration :
De même que le théorème précédent, ce n'est qu'une conséquence évidente de la continuité de l'opérateur $v \to D_2g(\cdot,v)$. Noter que l'on peut effectivement choisir un voisinage de (v_o,ν_o) dans lequel $\frac{\partial\alpha}{\partial\nu}(v,\nu) < 0$. ∎

Nous appliquerons maintenant le Théorème des Fonctions Implicites. D'après les résultats ci-dessus, nous savons, pour $v_o \in H_o^1(\Omega)$ et $\nu_o = \nu(v_o)$, qu'il existe un voisinage U_1 de v_o (qui peut être choisi contenu dans U_o), et il existe une fonction

$$g : v \in U_1 \to \tilde{g}(v) \in \mathbb{R}^1$$

telle que $\tilde{g}(v_o) = \nu_o$, et $\alpha(v,g(v)) = \eta$, $\forall v \in U_1$.

On a alors $\tilde{g}(v) = \nu(v)$, $\forall v \in U_1$. Parmi les résultats suivants, nous établirons la différentiabilité de la fonction $\tilde{g}$, et donc de $\nu = \nu(v)$.
Considérons maintenant l'opérateur

$$(9) \qquad R_o : v \in H_o^1(\Omega) \to g(\cdot,v-\nu\rho(\cdot)) \in L^q(\Omega),$$

avec $\nu \in \mathbb{R}^1$ fixé, que nous savons déjà continu, borné et compact. Nous allons voir qu'il est de plus différentiable. D'abord nous notons que à $v \in H_o^1(\Omega)$ et $v \in H_o^1(\Omega)$ donnés, et p.p. dans Ω, la fonction

$$t \to g(x,v(x)+t\delta v(x)-\nu\rho(x)),$$

de $\mathbb{R}^1$ dans lui-m^eme, est différentiable, et que sa dérivée en t=0 est :

$$D_2g(x,v(x)-\nu\rho(x))\cdot\delta v(x).$$

Nous avons aussi que les fonctions

$$\frac{1}{t}\{g(\cdot,v+t\delta v-\nu\rho(\cdot))-g(\cdot,v-\nu\rho(\cdot))\}\ ,\ t \neq 0,$$

de $L^q(\Omega)$, convergent vers $D_2g(\cdot,v-\nu\rho(\cdot))\cdot\delta v$ (définie p.p. dans Ω) dans $L^q(\Omega)$.

En effet, compte tenu de (3f), il existe une fonction $t^* = t^*(x)$, définie p.p. dans Ω, telle que

$$\frac{1}{t}\{g(x,v+t\delta v-\nu\rho(x))-g(x,v-\nu\rho(x))\} = D_2 g(x,v+t^*(x)\delta v-\nu\rho(x))\cdot\delta v$$

et

$$|t^*(x)| < |t| ,$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} &\int_\Omega \left|\frac{1}{t}\{g(x,v+t\delta v-\nu\rho(x))-g(x,v-\nu\rho(x))\} - D_2 g(x,v-\nu\rho(x))\cdot\delta v\right|^q dx = \\ &= \int_\Omega |\delta v|^q |D_2 g(x,v+t^*(x)\delta v-\nu\rho(x)) - D_2 g(x,v-\nu\rho(x))|^q dx. \end{aligned}\right.$$

Alors, une nouvelle application de (3g) et du Théorème de Lebesgue conduit au résultat désiré, c'est-à-dire, que l'<u>opérateur</u> (9) <u>est Gâteaux-différentiable pour chaque</u> $v \in H_o^1(\Omega)$ <u>et chaque</u> $\nu \in \mathbf{R}^1$, et

(10) $$R_o'(v;\delta v) = D_2 g(\cdot,v-\nu\rho(\cdot))\cdot\delta v , \quad \forall v \in H_o^1(\Omega), \quad \forall \; v \in H_o^1(\Omega).$$

<u>Remarque 2.1</u> : Avec N=2, $H_o^1(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ pour tout r fini. Donc, en particulier, nous pouvons voir dans (10) v comme une fonction de $L^{2p^*q}(\Omega)$, et δv comme une fonction de $L^{2q}(\Omega)$, d'où effectivement $R_o'(v;\delta v) \in L^q(\Omega)$, avec $q : 1 \leq q < +\infty$ artibraire.

Si N=3, on a $H_o^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$. Nous pouvons donc considérer dans (10), v comme une fonction de $L^6(\Omega)$, et alors, selon (3g), $D_2 g(\cdot,v-\nu\rho(\cdot))$ sera une fonction de $L^{3/2}(\Omega)$ d'où $D_2 g(\cdot,v-\nu\rho(\cdot))\cdot\delta v \in L^q(\Omega)$, avec $q = \frac{6}{5}$.

<u>Dans tous les cas, on a donc</u>

$$R_o'(v;\delta v) \in L^q(\Omega),$$

<u>pour un</u> q <u>tel que</u> $W^{2,q}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, <u>d'après l'inclusion de Sobolev.</u>

De (10) et de la <u>Remarque 2.1</u> on déduit que pour chaque $v \in H_o^1(\Omega)$, l'application $\delta v \to R_o'(v;\delta v)$, de $H_o^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, est linéaire et continue, et elle est donnée par la fonction $D_2 g(\cdot,v-\nu\rho(\cdot))$. Posons

$$R_o'(v;\delta v) = R_o'(v)\cdot\delta v \ , \ \underline{\text{pour}} \ v \in H_o^1(\Omega) \ \underline{\text{et}} \ \ v \in H_o^1(\Omega).$$

On voit aussi que l'application $v \to R_o'(v)$ est continue de $H_o^1(\Omega)$ dans $\mathcal{L}(H_o^1(\Omega) \ ; \ L^q(\Omega))$, car si $v_n \to v$ dans $H_o^1(\Omega)$, alors $D_2g(\cdot,v_n-\nu\rho(\cdot)) \to D_2g(\cdot,v-\nu\rho(\cdot))$ dans $L^{2q}(\Omega)$ si N=2 et dans $L^{3/2}(\Omega)$ si N=3.

Donc, l'opérateur (q) est aussi Fréchet-différentiable pour chaque $v \in H_o^1(\Omega)$, et sa différentielle est donnée par

$$(11) \qquad \begin{cases} R_o'(v)\cdot\delta v = D_2g(\cdot,v-\nu\rho(\cdot))\cdot\delta v \\ \\ \forall v \in H_o^1(\Omega), \ \forall \ v \in H_o^1(\Omega). \end{cases}$$

Il est également clair que l'application

$$(v,\delta v) \to R_o'(v)\cdot\delta v \ ,$$

de $H_o^1(\Omega) \times H_o^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, est continue.

Alors une simple application de la règle sur la dérivation des fonctions composées nous dit que l'application

$$v \to \alpha(v,\nu) = \int_\Omega S(v,\nu)\cdot g(x,v-\nu\rho(x))dx$$

est Fréchet-différentiable, et que sa différentielle est donnée par

$$(12) \qquad (\frac{\partial\alpha(v,\nu)}{\partial v},\delta v) = 2\int_\Omega S(v,\nu) \ D_2g(x,v-\nu\rho(x))\cdot\delta v \ dx$$

pour $v \in H_o^1(\Omega)$, $\delta v \in H_o^1(\Omega)$ (compte tenu encore du caractère auto-adjoint de $\mathcal{L}$).

Remarque 2.2 : L'égalité (12) entraîne aussi la relation $\frac{\partial\alpha(v,\nu)}{\partial v} \in L^q(\Omega)$, avec q arbitraire si N=2, et q = 6/5 si N=3. ∎

On déduit aussi de (12) que l'application $(v,\nu) \to \frac{\partial\alpha(v,\nu)}{\partial v}$ est continue de $H_o^1(\Omega) \times \mathbb{R}^1$ dans $L^q(\Omega)$ (et donc dans $H^{-1}(\Omega)$).

Nous pouvons donc appliquer la règle de différentiation des fonctions implicites, ce qui nous donne :

Théorème 2.1.2 : Soit $v_o \in H^1_o(\Omega)$, et $\nu_o = \nu(v_o)$. Alors la fonction $v \to \nu(v)$ est continuement différentiable dans un voisinage de v_o, et on a :

$$\nu'(v) = -\frac{1}{\frac{\partial\alpha(v,\nu(v))}{\partial\nu}} \cdot \frac{\partial\alpha(v,\nu(v))}{\partial v} =$$

$$= \frac{1}{\int_\Omega S(v,\nu(v))\cdot D_2g(x,v-\nu(v)\rho(x))\cdot\rho(x)dx} \cdot S(v,\nu(v))D_2g(x,v-\nu(v)\rho(x)),$$

c'est-à-dire :

(13a) $\qquad \nu'(v) \in L^q(\Omega) \quad$ ($q > 1$ fini, arbitraire si $N=2$, et $q = 6/5$, si $N=3$),

(13b) $$\nu(v)\cdot\delta v = \frac{1}{\int_\Omega S(v,\nu(v))\cdot D_2g(x,v-\nu(v)\rho(x))\cdot\rho v\, dx} \times$$
$$\times \int_\Omega S(v,\nu(v))\cdot D_2g(x,v-\nu\rho(x))\cdot\delta v\, dx\ ,$$

avec v dans un voisinage de v_o, et $\delta v \in H^1_o(\Omega)$. ∎

Remarque 2.3 : D'après ce Théorème, v_o étant arbitraire dans $H^1_o(\Omega)$, (13a) et (13b) sont valables $\forall v \in H^1_o(\Omega)$ et $\forall\ \delta v \in H^1_o(\Omega)$. ∎

Posons maintenant

(14) $\qquad R(v) = g(\cdot,v-\nu(v)\rho(\cdot)).$

L'opérateur $v \to R(v)$ est compact de $H^1_o(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, et, d'après une nouvelle application de la règle sur la dérivation des fonctions composées, il est Fréchet-différentiable dans $H^1_o(\Omega)$, sa différentielle étant donnée par :

(15) $$\begin{cases} R'(v)\cdot\delta v = D_2g(\cdot,v-\nu(v)\rho(\cdot))\cdot(\delta v-\rho(\cdot)\ \times \\ \times \dfrac{1}{\int_\Omega S(v,\nu(v))D_2g(x,v-\nu(v)\rho(v))\rho(v)dx}\cdot\int_\Omega S(v,\nu(v))D_2g(x,v-\nu(v)\rho(x))\delta v\, dx. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$\beta(v,\nu) = \int_{\Omega} S(v,\nu)\cdot D_2 g(x,v-\nu\rho(x))\rho(x)dx,$$

alors (15) peut s'écrire

$$(15')\qquad \begin{cases} R'(x)\cdot\delta v = D_2 g(\cdot,v-\nu(v)\rho(x))\cdot\{\ \delta v - \dfrac{\rho(\cdot)}{\beta(v,\nu(v))}\ \times \\ \qquad\qquad \times\displaystyle\int_{\Omega} S(v,\nu(v))\cdot D_2 g(x,v-\nu(v)\rho(x))\delta v\ dx. \end{cases}$$

Remarque 2.4 : Notons que le problème (P) décrit dans 1.1 peut être formulé de la manière suivante :

$$(R)\qquad \begin{cases} \underline{\text{Trouver}}\ u \in H_o^1(\Omega),\ \underline{\text{tel que}}\ : \\ \mathcal{L}u = R(u)\ \underline{\text{dans}}\ \Omega. \end{cases}$$

Alors, si on appelle $\xi = \xi(v)$ à la solution (unique) de

$$(16)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}\xi = R(v)\ \underline{\text{dans}}\ \Omega, \\ \xi = 0\ \underline{\text{sur}}\ \Gamma, \end{cases}$$

(nous avons $\xi(v) = T(v)$ et même $\xi(v) = T^+(v)$ si $v \geq 0$ dans Ω), (P) peut aussi s'écrire de la façon équivalente

$$(Q)\qquad \begin{cases} \underline{\text{Trouver}}\ u \in H_o^1(\Omega),\ \underline{\text{tel que}}\ : \\ J(u) = \inf\limits_{v\in H_o^1(\Omega)} J(v),\ \underline{\text{avec}} \\ J(v) = \dfrac{1}{2}\, a(v-\xi,v-\xi),\ \underline{\text{et}}\ \xi\ \underline{\text{donné par}}\ (16). \end{cases}$$

Nous avons donc réduit (P) à un problème de contrôle optimal, dont l'état du système est donné par la solution de (16), le contrôle est v, et la fonction coût est :

$$(17)\qquad v \to J(v) = \frac{1}{2}\, a(v-\xi,v-\xi),\ \ \xi = \xi(v).$$

La différentiabilité de R nous permettra d'en déduire celle de J, et nous pourrons en particulier appliquer des méthodes de type gradient pour la résolution de (Q).

Remarque 2.5 : Nous avons choisi dans la Remarque 2.4 la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ pour définir la norme dans $H_o^1(\Omega)$ qui mesure l'écart entre ξ et v. D'autres normes peuvent aussi être choisies, et on obtient ainsi différentes formulations du même problème. Par exemple, on peut poser

$$(18) \qquad J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |v-\xi|^2 dx, \quad \xi = \xi(v),$$

ou

$$(19) \qquad J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(v-\xi)|^2 dx \ , \quad \xi = \xi(v). \quad \blacksquare$$

Remarque 2.6 : La meilleure formulation au sens des moindres carrés pour résoudre (R) sera la suivante

$$(20) \qquad \inf_{v\in H_o^1(\Omega)} \|-\mathcal{L}v+R(v)\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

Mais, si l'on a introduit $\xi \in H_o^1(\Omega)$, solution de (16), alors (20) prend la forme

$$(21) \qquad \inf_{v\in H_o^1(\Omega)} \|-\mathcal{L}(v-\xi)\|_{H^{-1}(\Omega)} \quad , \quad \xi = \xi(v).$$

Si l'on explicite la valeur $\|-\mathcal{L}(v-\xi)\|_{H^1(\Omega)}$, on obtient :

$$\|-\mathcal{L}(v-\xi)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{\phi\in H_o^1(\Omega)\\ \phi\neq 0}} \frac{|<-\mathcal{L}(v-\xi),\phi>|}{\|\phi\|_{H_o^1(\Omega)}} =$$

$$= \sup_{\phi\in H_o^1(\Omega)} \frac{|a(v-\xi,\phi)|}{\|\phi\|_{H_o^1(\Omega)}} = a(v-\xi,v-\xi)^{1/2} = \|v-\xi\|_{H_o^1(\Omega)} ,$$

en ayant choisi la norme dans $H_o^1(\Omega)$

$$\|v\|_{H_o^1(\Omega)} = a(v,v)^{1/2} = \left(\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx\right)^{1/2},$$

équivalente à la norme standard

$$\|v\| = \left(\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{1/2} ,$$

et $\|\cdot\|_{H^{-1}(\Omega)}$ étant la norme duale de $\|\cdot\|_{H_o^1(\Omega)}$. ■

Remarque 2.7 : Tout ce qui a été dit pour les cas N=2 et 3 peut aussi être appliqué au cas général $N \leq 5$, si l'on écrit dans (3g) :

$$1 < p^* < +\infty \ \text{(arbitraire), si } N \leq 2,$$

$$1 < p^* \leq \frac{4}{N-2} \ , \ \text{si } N \geq 3. \ ■$$

2.2. Le cas discret.

Sous les mêmes hypothèses (3f) et (3g) qui ont été imposées sur la fonction g dans 2.1, on peut aussi appliquer le Théorème des Fonctions Implicites à l'équation

$$\alpha_h(\xi_h,\nu_h) = \eta$$

dans un voisinage d'un point $(\xi_h^o,\nu_h(\xi_h^o))$.

Nous pouvons écrire également (P_h) sous la forme équivalente :

$$(R_h) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \zeta_h \in \mathbb{R}^m \text{ tel que} \\ \\ A_h\zeta_h = R_h(\zeta_h), \end{cases}$$

où l'opérateur $\xi_h \to R_h(\xi_h) = b_h(\xi_h,\nu_h(\xi_h))$ est continu et différentiable, et sa différentielle est donnée par :

$$R'(\xi_h) = \left(I - \frac{1}{\beta_h(\xi_h,\nu_h(\xi_h))} f_h(\xi_h)\cdot s_h(\xi_h,\nu_h(\xi_h))^t\right)\cdot F_h(\xi_h) \ , \tag{22}$$

avec :

. $f_h(\xi_h)$ le vecteur de composantes

$$f_h^j(\xi_h) = \int_\Omega D_2 g(x, \sum_{i=1}^m \xi_h^i w_i - \nu_h(\xi_h)\rho(x))\rho(x) w_j(x)dx,$$

. $\beta_h(\xi_h, \nu_h(\xi_h)) = (f_h(\xi), S_h(\xi_h, \nu_h(\xi_h)))$ et

. $F_h(\xi_h)$ la matrice de composantes

$$F_{h,j}^i(\xi_h) = \int_\Omega D_2 g(x, \sum_{i=1}^m \xi_h^i w_i - \nu_h(\xi_h)\rho(x)) w_i w_j dx.$$

Remarque 2.8 : On peut procéder de façon analogue avec le problème (P_h^*). ■

3. - MONOTONIE

Dans cette Section nous allons appliquer les propriétés de monotonie de l'opérateur $v \to R(v)$ de la Remarque 2.3 et obtenir ainsi des algorithmes relatifs au problème.

On rappelle qu'un espace de Banach E est dit partiellement ordonné s'il existe une relation d'ordre partiel $\leq$ entre ses éléments qui vérifie :

1 - $f \in E,\ f \geq 0 \Longrightarrow cf \geq 0$ pour $c > 0$ (réel)

2 - $f_1, f_2, g_1, g_2 \in E$, $f_1 \geq g_1$, $f_2 \geq g_2 \Longrightarrow f_1 + f_2 \geq g_1 + g_2$.

Soit $E = H_o^1(\Omega) \times \mathbb{R}^1$, avec l'ordre partiel :

$$e_1 = (v_1, \mu_1),\ e_2 = (v_2, \mu_2) \in E\ ,\ e_1 \leq e_2 \text{ si et seulement si}$$

"$v_1(x) \leq v_2(x)$ p.p. dans Ω et $\mu_2 \leq \mu_1$ (dans $\mathbb{R}^1$)"

Définissons dans E l'opérateur

(0) $\quad (v, \mu) \to N(v, \mu) = (S(v, \mu), \nu(v))$.

Nous pouvons écrire $N = N_1 + N_2$, avec

$$N_1(v,\mu) = (S(v,\mu),0) \text{ et } N_2(v,\mu) = (0,\nu(v)).$$

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.1 : L'opérateur N et les opérateurs N_1 et N_2 sont compacts de E dans lui-même. De plus, N_1 est isotone ($e_1 \leq e_2 \Longrightarrow N_1(e_1) \leq N_1(e_2)$), tandis que N_2 est antitone ($e_1 \leq e_2 \Longrightarrow N_2(e_1) \leq N_2(e_2)$).

Démonstration :

La compacité des trois opérateurs N, N_1 et N_2 est triviale, compte tenu de la compacité de l'opérateur

$$(v,\mu) \to S(v,\mu)$$

de E (muni de la structure de Banach naturelle) dans $H^1_o(\Omega)$.

D'autre part, si $e_1 = (v_1,\mu_1)$, $e_2(v_2,\mu_2)$ et

$$(1) \qquad \begin{cases} v_1 \leq v_2 \text{ p.p. dans } \Omega, \\ \mu_1 \geq \mu_2 , \end{cases}$$

alors

$$g(x,v_1-\mu_1\rho(x)) \leq g(x,v_2-\mu_2\rho(x))$$

p.p. dans Ω, d'où d'après le Principe du Maximum,

$$S(v_1,\mu_1) \leq S(v_2,\mu_2) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Cela entraîne l'isotonie de N_1. Par ailleurs, si avec les conditions (1) on a $\nu(v_1) > \nu(v_2)$, alors

$$\begin{aligned} \eta = & \int_\Omega S(v_1,\nu(v_1))\cdot g(x,v_1-\nu(v_1)\rho(x))dx < \\ & < \int_\Omega S(v_2,\nu(v_2))\cdot g(x,v_2-\nu(v_2)\rho(x))dx = \eta, \end{aligned}$$

et donc il y a contradiction. On a aussi l'antitonie de N_2, d'où le résultat. ∎

Nous allons maintenant appliquer le résultat suivant, dont la démonstration est donnée dans Collatz [1] :

Théorème 3.1 : On considère l'équation

$$(2) \qquad e = N(e)$$

dans un espace de Banach partiellement ordonné E, où N peut être écrit comme la somme des deux opérateurs N_1 (isotone) et N_2 (antitone) ; on suppose que N_1 et N_2 sont continus et définis dans un domaine convexe D. Nous considérons les itérations :

$$(3) \qquad \begin{cases} e_{n+1} = N_1(e_n) + N_2(f_n) \\ f_{n+1} = N_1(f_n) + N_2(e_n) \end{cases} \qquad n=0,1,2,\ldots$$

à partir des éléments $e_o, f_o \in D$.

Supposons que les éléments e_o, f_o, e_1, f_1 vérifient

$$(4) \qquad e_o \leq e_1 \leq f_1 \leq f_o.$$

Alors l'opérateur N applique chaque $M_n = [e_n, f_n]$ dans lui-même.
Si pour un $n \geq 0$, $N(M_n)$ est compact, alors l'équation (2) a une solution e qui en outre vérifie :

$$e_n \leq e \leq f_n \quad , \; n=0,1,\ldots \qquad \blacksquare$$

Notons que l'équation

$$(5) \qquad (u,\nu) = N(u,\nu) \equiv (S(u,\nu),\nu(u))$$

n'est qu'une nouvelle formulation de (P) lorsqu'on considère l'opérateur N de (0). Nous choisissons alors (v^o,ν^o) et (w^o,μ^o) dans E tels que $v^o \leq w^o$ et $\nu^o \geq \mu^o$, et nous itérons à partir des relations

$$\begin{cases} (v^{n+1},\nu^{n+1}) = N_1(v^n,\nu^n)+N_2(w^n,\mu^n) \\ (w^{n+1},\mu^{n+1}) = N_1(w^n,\mu^n)+N_2(v^n,\nu^n) \end{cases} \qquad n=0,1,2,\ldots ,$$

c'est-à-dire :

$$v^{n+1} = S(v^n,\nu^n) \ , \ \nu^{n+1} = \nu(w^n)$$

$$w^{n+1} = S(w^n,\mu^n) \ , \ \mu^{n+1} = \nu(v^n)$$

Les inégalités (4) s'écriront ici :

(4') $$v^o \leq v^1 \leq w^1 \leq w^o \ , \ \nu^o \geq \nu^1 \geq \mu^1 \geq \mu^o \ .$$

Si on peut choisir (v^o,ν^o) et (w^o,μ^o) tels que (4') soit vrai, il existera une solution (u,) de (5) (et donc de (P)) telle que

$$v^n \leq u \leq w^n \quad , \ \nu^n \geq \nu \geq \mu^n, \ n=0,1,2,\dots \ .$$

4. - QUELQUES CAS TYPIQUES.

4.1. Le cas $g(x,s) = \lambda(s-t(x))_+$.

Nous allons maintenant supposer que la fonction g est de la forme :

(1) $$g(x,s) = \begin{cases} \lambda(x-t(x)), \text{ si } s-t(x) > 0, \ \lambda > 0, \\ 0, \text{ si } s-t(x) \leq 0, \end{cases}$$

où $t(x)$ est une fonction continue dans $\overline{\Omega}$ qui prend des valeurs >0 dans Ω. Nous pourrons donc écrire

(2) $$g(x,s) = \lambda f(x-t(x)) \equiv \lambda(s-t(x))_+ \ , \ \lambda > 0,$$

pour $x \in \overline{\Omega}$, $s \in \mathbb{R}^1$.

Il est clair que la fonction g vérifie les conditions (3a)-(3e) de 1.1, avec $s_o = 0$, $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ arbitraire et $\Omega_o = \Omega$. Pourtant, pour chaque $x \in \Omega$, la fonction $s \to g(x,s)$ n'est pas différentiable. Nous ne pourrons donc pas appliquer les résultats de la Section 2 dans ce cas.

Pour lever cette difficulté nous approcherons le problème (P) correspondant à la fonction (1) pour d'autres problèmes dont les conditions (3f) et (3g) seront vérifiées.

Nous procéderons comme suit :
Soit $\varepsilon > 0$; posons

$$f_\varepsilon(s) = \begin{cases} 0, \text{ si } s < -\varepsilon, \\ (s+\varepsilon)^2/(4\varepsilon), \text{ si } -\varepsilon \le s \le \varepsilon, \\ s, \text{ si } s > \varepsilon. \end{cases}$$

Soit

$$g_\varepsilon(x,s) = \lambda f_\varepsilon(x-t(x)),\ x \in \overline{\Omega},\ s \in \mathbb{R}^1.$$

Alors la fonction g_ε vérifie les hypothèses (3f) et (3g) de 2.1. En effet, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $s \to g_\varepsilon(x,s)$ est différentiable, et sa dérivée, la fonction

$$(3) \qquad s \to D_2 g(x,s) = \begin{cases} 0, \text{ si } s-t(x) < -\varepsilon, \\ \lambda\, \dfrac{s-t(x)+\varepsilon}{2\varepsilon}, \text{ si } -\varepsilon \le s-t(x) \le \varepsilon, \\ \lambda, \text{ si } s-t(x) > \varepsilon, \end{cases}$$

est continue. D'autre part, pour tout $s \in \mathbb{R}^1$, la fonction $x \to D_2 g(x,s)$ est intégrable de Ω dans $\mathbb{R}^1$.

Enfin, notons que pour $s > \varepsilon + \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} t(x)$ la fonction (3) est constante, $\forall x \in \overline{\Omega}$. cela implique (3g).

La fonction g vérifie également les hypothèses (3a)-(3e) de (1.1). Donc, il est possible de considérer pour chaque $\varepsilon > 0$ le problème correspondant

$$(P_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \underline{\text{Trouver}}\ u_\varepsilon \in H^2(\Omega)\ \underline{\text{et}}\ \nu_\varepsilon \in \mathbb{R}^1,\ \underline{\text{satisfaisant}} : \\ \mathcal{L} u_\varepsilon = g_\varepsilon(x, u_\varepsilon - \nu_\varepsilon \rho(x))\ \underline{\text{dans}}\ \Omega, \\ u_\varepsilon = 0\ \underline{\text{sur}}\ \Gamma, \\ a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \eta. \end{cases}$$

Compte tenu de la relation $a(u_\varepsilon,u_\varepsilon) = \eta$, $\forall\, \varepsilon > 0$, il existe $u^* \in H^1_0(\Omega)$, $\nu^* \in \mathbb{R}^1$ tels que, pour une sous-suite $(u_{\varepsilon'})$ (généralisée) de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, nous avons

$$(4)\qquad \begin{cases} u_{\varepsilon'} \to u^* \ \underline{\text{dans}}\ H^1_0(\Omega)\text{-}\underline{\text{faible et dans}}\ L^{pq}(\Omega) \\ \nu_{\varepsilon'} \to \nu^* \ (\underline{\text{dans}}\ \mathbb{R}^1). \end{cases}$$

Alors

$$(5)\qquad \begin{cases} \|g(\cdot,u^*-\nu^*\rho(\cdot))-g_{\varepsilon'}(\cdot,u_{\varepsilon'}-\nu_{\varepsilon'}\rho(\cdot))\|_{L^q(\Omega)} \le \\ \le \ \|g(\cdot,u^*-\nu^*\rho(\cdot))-g(\cdot,u_{\varepsilon'}-\nu_{\varepsilon'}\rho(\cdot))\|_{L^q(\Omega)} + \\ + \|g(\cdot,u_{\varepsilon'}-\nu_{\varepsilon'}\rho(\cdot))-g_\varepsilon(\cdot,u_{\varepsilon'}-\nu_{\varepsilon'}\rho(\cdot))\|_{L^q(\Omega)} . \end{cases}$$

Mais (4) entraîne que le premier terme de ce dernier membre tend vers 0 lorsque $\varepsilon' \to 0$. D'autre part, le fait que

$$g(x,u_{\varepsilon'}(x)-\nu_{\varepsilon'}\rho(x))-g_{\varepsilon'}(x,u_{\varepsilon'}(x)-\nu_{\varepsilon'}\rho(x)) \to 0$$

<u>p.p. dans</u> Ω, $\forall \varepsilon'$, et le caractère d'application bornée des opérateurs $v \to g_{\varepsilon'}(\cdot,v)$, de $L^{pq}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, ainsi que les inégalités

$$g_\varepsilon(x,s) \le h(x,s) = \begin{cases} 0, \text{ si } s-t(x) < -1, \\ \lambda[2(s-t(x))+1] \ , \text{ si } |s-t(x)| \le 1, \\ \lambda(s-t(x)), \text{ si } s-t(x) > 1, \end{cases}$$

pour $\varepsilon < 1$, entrainent, d'après l'application du <u>Théorème de Lebesgue</u>, la convergence du second membre de (5) vers zéro ; c'est-à-dire,

$$g_{\varepsilon'}(\cdot,u_{\varepsilon'}-\nu_{\varepsilon'}\rho(\cdot)) \to g(\cdot,u -\nu\ \rho(\cdot)) \text{ dans } L^q(\Omega),$$

lorsque $\varepsilon' \to 0$.

Alors, <u>d'après l'estimation dans</u> $L^q(\Omega)$, <u>les fonctions</u> $u_{\varepsilon'}$ <u>convergent dans</u> $W^{2,q}(\Omega)$ <u>vers la solution</u> v^* <u>du problème</u>

$$\mathcal{L}v^* = g(x,v^*-\nu^*\rho(x)) \text{ dans } \Omega,$$
$$v^* = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Selon (4'), $v^* = u^*$ p.p. dans Ω, et donc la convergence des $u_{\varepsilon'}$ vers u^* est dans $W^{2,q}(\Omega)$. Cela entraîne aussi

$$\nu^* = \lim_{\varepsilon'\to 0} \nu_{\varepsilon'} = \nu(u^*),$$

d'où u^* est solution de (P).

Le problème (P) considéré peut donc être approché par des problèmes dont le second membre est différentiable.

<u>Remarque 4.1</u> : Noter que si les u_ε les solutions respectives des (P_ε), alors l'ensemble $\{u_\varepsilon | \varepsilon > 0\}$ est borné dans $L^\infty(\Omega)$, car il est borné dans $W^{2,q}(\Omega)$. ∎

4.2. <u>Le cas limite</u> <u>(fonction de Heaviside)</u>.
Soit maintenant $g(x,s) = \lambda h(x-t(x))$, $\lambda > 0$, avec

$$h(s) = \begin{cases} 1 \text{ , si } s > 0, \\ 0 \text{ , si } s < 0, \end{cases}$$

(définie p.p. dans $\mathbb{R}^1$; is s'agit de <u>la fonction de Heaviside</u> dont la dérivée au sens des distributions sur $\mathbb{R}^1$ est la masse de Dirac à l'origine).
D'une façon analogue à 4.1, nous pouvons associer à chaque $\varepsilon > 0$ la fonction

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, \underline{\text{ si }} s < -\varepsilon \\ (s+\varepsilon)^2/(2\varepsilon^2) \text{ , } \underline{\text{si}} \quad -\varepsilon \le s \le 0, \\ -(s-\varepsilon)^2/(2\varepsilon^2) + 1, \ \underline{\text{si}} \quad 0 \le s \le \varepsilon, \\ 1, \ \underline{\text{si}} \ s > \varepsilon, \end{cases}$$

pour construire

$$g_\varepsilon(x,s) = \lambda h_\varepsilon(s-t(x)), \quad x\in\bar{\Omega}\ , \quad s\in\mathbb{R}^1\ ,$$

et considérer le problème correspondant

$$(P\ )\quad\begin{cases} \underline{\text{Trouver}}\ u_\varepsilon \in H^2(\Omega)\ \underline{\text{et}}\ \nu_\varepsilon \in \mathbb{R}^1,\ \underline{\text{satisfaisant}} \\ \mathcal{L}u_\varepsilon = g_\varepsilon(x,u_\varepsilon-\nu_\varepsilon\rho(x))\ \underline{\text{dans}}\ \Omega, \\ u_\varepsilon = 0\ \underline{\text{sur}}\ \Gamma, \\ a(u_\varepsilon,u_\varepsilon) = \eta. \end{cases}$$

Maintenant les fonctions g_ε vérifient les hypothèses (3a), (3b), (3d), (3f) et (3g), et nous avons, au moins pour une sous-suite $(u_{\varepsilon'})$, la convergence vers u^*, solution du problème correspondant (P), si ces solutions existent.

Remarque 4.2 : Il est clair que dans ce cas l'existence de solutions de (P) n'est pas assurée, car la fonction g ne vérifie pas (3c). On peut donner des exemples pour lesquels il n'y a pas de solution. Pourtant, sous certaines hypothèses supplémentaires pour les données Ω, λ et η, on peut obtenir quelques résultats d'existence (pour détails, voir Berestycki [3]). ■

Remarque 4.3 : Si on peut démontrer que les problèmes (P) et (P_ε), $\varepsilon > 0$, ont des solutions, on peut (comme dans 4.1) "régulariser" (P), de sorte qu'on pourra après appliquer les résultats de la Section 2. Pourtant, dans ce cas particulier, la forme spéciale de D_2g peut apporter certaines difficultés supplémentaires. ■

REFERENCES

AGMON, S. - DOUGLIS, A. - NIREMBERG, L. [1] "Estimates near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations satisfying general Boundary Conditions". Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), p. 623-727.

BERESTYCKI, H. [1] "Quelques Questions liées à la Théorie des Tourbillons Stationnaires dans un Fluide Idéal". Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris VI, Février 1980.

BERESTYCKI, H. [2] A paraître.

BERESTYCKI, H. [3] A paraître.

BERGER, M.S. [1] "New Variational Methods in Nonlinear Analysis", Trans. A.M.S. (1973), p. 1-39.

BERGER, M.S. [2] "Nonlinearity and Functional Analysis". Academic Press, New-York, 1977.

BOURBAKI, N. [1] "Eléments de Mathématiques : Livre VI, Intégration". Actualités Scient. Ind. Hermann, Paris, 1963-67.

CIARLET, Ph. [1] "The Finite Element Method for Elliptic Problems", North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.

CIARLET, Ph. - RAVIART, Ph. [1] "Maximum Principle and Uniform Convergence for the Finite Element Method". Computer Methods in Appl. Mech. & Engineering 2 (1973), p. 17-31.

COLLATZ, L. [1] "Functional Analysis and Numerical Mathematics". Academic Press, New-York, 1966.

FUJII, H. [1] "Some Remarks on Finite Element Analysis on Time-Dependent Field Problems", in "Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis". University of Tokyo Press, 1973.

RUAS, V. [1] Communication Personnelle, INRIA, 1980.